

Capitolo Quarto

LE FUNZIONI ELEMENTARI

§ 1. FUNZIONI REALI DI VARIABILE REALE

Si chiamano *funzioni reali di variabile reale* le funzioni definite in un sottoinsieme E di \mathbb{R} e a valori in \mathbb{R} . Scriveremo $f: E \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Sappiamo che per definire una funzione è necessario assegnare il dominio, il codominio e la legge f . Nel nostro caso sottintenderemo, salvo esplicito avviso del contrario, che il codominio è \mathbb{R} . Quanto al dominio, sempre salvo esplicito avviso del contrario, sottintenderemo che esso è quello più grande possibile, cioè quello formato da *tutti* i numeri reali per cui la f ha senso.

ESEMPIO. 1) Qual è il dominio della funzione $f(x) = \sqrt{x+1}$? Questa domanda significa: "Qual è il più grande sottoinsieme di \mathbb{R} per ogni x del quale si può definire il numero $\sqrt{x+1}$ "? La risposta è ovviamente data da $E = \{x: x \geq -1\}$.

Nell'insieme di tutte le funzioni definite in un qualunque insieme E e a valori in \mathbb{R} si possono introdurre in modo del tutto naturale alcune operazioni.

DEFINIZIONE. Qualunque sia l'insieme E , date le funzioni $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$, si ottengono le nuove funzioni:

$$\begin{aligned} f+g: E &\rightarrow \mathbb{R}, & \text{definita da } (f+g)(x) &:= f(x) + g(x), \\ -f: E &\rightarrow \mathbb{R}, & \text{definita da } (-f)(x) &:= -f(x), \\ fg: E &\rightarrow \mathbb{R}, & \text{definita da } (fg)(x) &:= f(x)g(x), \\ \frac{1}{g}: E' &\rightarrow \mathbb{R}, & \text{definita da } \frac{1}{g}(x) &:= \frac{1}{g(x)}, & \text{con } E' = \{x \in E: g(x) \neq 0\}, \\ \frac{f}{g}: E' &\rightarrow \mathbb{R}, & \text{definita da } \frac{f}{g}(x) &:= \frac{f(x)}{g(x)}, & \text{con } E' = \{x \in E: g(x) \neq 0\}, \\ f \vee g: E &\rightarrow \mathbb{R}, & \text{definita da } (f \vee g)(x) &:= \max \{f(x), g(x)\}, \\ f \wedge g: E &\rightarrow \mathbb{R}, & \text{definita da } (f \wedge g)(x) &:= \min \{f(x), g(x)\}. \end{aligned}$$

Si constata immediatamente che

TEOREMA 1. *La somma di funzioni reali è associativa e commutativa, ha elemento neutro (la funzione di valore costante 0); ogni funzione f ha un'opposta, la funzione $-f$. Dunque: L'insieme delle funzioni reali definite in E , con l'operazione di somma, è un gruppo abeliano.*

Il prodotto di funzioni reali è associativo, commutativo, distributivo rispetto alla somma e ha elemento neutro (la funzione di valore costante 1). Dunque: L'insieme delle funzioni reali definite in E , con le operazioni di somma e prodotto, è un anello commutativo con unità. ■

Si noti che sono dotate di reciproca solo le funzioni che non si annullano in alcun punto di E . È utile ricordare il seguente risultato (di facile verifica) che dà una comoda espressione delle funzioni $f \vee g$ e $f \wedge g$:

TEOREMA 2. Date le funzioni $f, g: E \rightarrow \mathbb{R}$, si ha:

$$(f \vee g)(x) = \frac{1}{2} [f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|],$$

$$(f \wedge g)(x) = \frac{1}{2} [f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|]. \blacksquare$$

ESEMPIO. 2) Siano $f, g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{per } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{per } 0 \leq x \leq 1, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } -1 \leq x < 0 \\ x & \text{per } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

Si ha $(f \vee g)(x) = |x|$ e $(f \wedge g)(x) = 0$, per ogni $x \in [-1, 1]$.

Si osservi che il prodotto delle due funzioni è la funzione nulla, anche se non è tale nessuna delle due funzioni date. Dunque:

Nell'insieme delle funzioni di un insieme E in \mathbb{R} non è valida la legge dell'annullamento del prodotto.

DEFINIZIONE. Una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *pari* se da $x \in E$ segue $-x \in E$ e $f(-x) = f(x)$.

Una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *dispari* se da $x \in E$ segue $-x \in E$ e $f(-x) = -f(x)$.

La funzione di \mathbb{R} in \mathbb{R} definita da $f(x) = x^n$ è una funzione pari se n è pari ed è una funzione dispari se n è dispari. Da qui l'origine della definizione.

Sono inoltre pari le seguenti funzioni di \mathbb{R} in \mathbb{R} : $|x|$, $\sqrt[3]{x^2}$; $\cos x$, tutte le funzioni costanti.

Sono invece dispari le seguenti funzioni di \mathbb{R} in \mathbb{R} : $\sin x$, $\sqrt[3]{x}$. Sono dispari anche la funzione di $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ in \mathbb{R} $\text{sign } x := \frac{x}{|x|}$ e la funzione $\text{tg } x$ definita in $\mathbb{R} \setminus \{\pi/2 + k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.

Il grafico di una funzione pari è simmetrico rispetto all'asse delle ordinate; il grafico di una funzione dispari è simmetrico rispetto all'origine. Ciò è di evidente aiuto quando si debba effettuare lo studio di una funzione.

Si vede poi facilmente che: la somma e il prodotto di funzioni pari è una funzione pari; la somma di funzioni dispari è dispari; il prodotto di due funzioni dispari è pari; il prodotto di una funzione pari per una funzione dispari è dispari.

DEFINIZIONE. Una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, è detta *periodica di periodo τ* , con τ numero reale positivo, se da $x \in E$ segue $x \pm \tau \in E$ e $f(x + \tau) = f(x)$. Il numero τ è detto un *periodo* della funzione.

Ovviamente, se τ è un periodo, sono tali anche $2\tau, 3\tau, \dots, n\tau, \dots$. Dunque non c'è un massimo periodo. È invece più interessante vedere se c'è un *minimo periodo*. La risposta è positiva se la funzione è *continua* (cfr. Cap. 5, § 8, Esercizio 8). Mostriamo, intanto, con un esempio che esistono funzioni periodiche senza minimo periodo.

ESEMPIO. 3) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione che vale 1 nei punti razionali e 0 in quelli irrazionali. Si vede che ogni numero razionale positivo è un periodo, dato che, se r è un numero razionale, $x + r$ è razionale se e solo se lo è x . Si ha dunque, per ogni $r > 0$, $f(x + r) = f(x)$.

I tipici esempi di funzioni periodiche sono dati dalle funzioni circolari o goniometriche di cui parleremo nel § 6. Diciamo, intanto che le funzioni seno e coseno sono periodiche di periodo 2π , mentre la funzione tangente è periodica di periodo π .

Dovendo studiare una funzione periodica di periodo τ , basta studiare la sua restrizione ad $E \cap I$, con I intervallo di ampiezza τ .

DEFINIZIONE. Sia data una funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

La f è detta *monotona crescente* se da $x_1, x_2 \in E$, con $x_1 < x_2$, segue $f(x_1) < f(x_2)$;

la f è detta *monotona decrescente* se da $x_1, x_2 \in E$, con $x_1 < x_2$, segue $f(x_1) > f(x_2)$;

la f è detta *monotona non - crescente* se da $x_1, x_2 \in E$, con $x_1 < x_2$, segue $f(x_1) \geq f(x_2)$;

la f è detta *monotona non - decrescente* se da $x_1, x_2 \in E$, con $x_1 < x_2$, segue $f(x_1) \leq f(x_2)$.

In ciascuno dei primi due casi, la f è detta *strettamente monotona*.

Attenzione! Dire che la funzione f è non - crescente è cosa ben diversa dal dire che f non è crescente; quest'ultima frase significa solo che da $x_1, x_2 \in E$, con $x_1 < x_2$, non segue affatto $f(x_1) < f(x_2)$.

Sono crescenti le funzioni di \mathbb{R} in \mathbb{R} : $x, x^3, e^x, \sqrt[3]{x}, \arctg x$.

Sono decrescenti le funzioni di \mathbb{R} in \mathbb{R} : $-x, -x^3, e^{-x}$.

La funzione di \mathbb{R} in \mathbb{R} definita da $f(x) = [x]$ è non - decrescente.

La funzione di \mathbb{R} in \mathbb{R} definita da $f(x) = x^2$ non è monotona.

È importante osservare che *ogni funzione strettamente monotona è iniettiva*. Per vedere che, in generale, non sussiste l'implicazione opposta, basta considerare la funzione $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = 1/x$.

§ 2. POLINOMI E FUNZIONI RAZIONALI

La nozione di polinomio e le operazioni fra polinomi fanno parte del bagaglio culturale di ogni studente. Qui perciò richiameremo soltanto alcune cose che ci saranno utili in seguito, limitandoci al caso dei polinomi in una sola *variabile* o *indeterminata*.

Un polinomio P nella variabile x è un'espressione del tipo

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0, \text{ con } a_i \in \mathbb{R}.$$

Se è $a_n \neq 0$, si dice che il polinomio è di *grado* n ; in ogni caso si dice che è di *grado formale* n . Le costanti non nulle sono *polinomi di grado* 0. La costante 0 è detta *polinomio nullo*; ad esso non si attribuisce alcun grado, ma, per ragioni di comodità, ci si comporta come se avesse grado minore di zero. Il grado di un polinomio P sarà indicato con $gr P$.

Le note operazioni di somma e prodotto fra polinomi hanno le stesse proprietà delle analoghe operazioni fra numeri interi; lo stesso accade per l'operazione di divisione con resto.

TEOREMA 3. *Dati due polinomi A e B , con B diverso dal polinomio nullo, esiste una e una sola coppia di polinomi Q e R tali che*

$$1) A = QB + R,$$

$$2) gr R < gr B.$$

DIM. L'esistenza della coppia (Q, R) si prova utilizzando il ben noto algoritmo della divisione fra polinomi. Qui ci limiteremo a provare l'unicità. Supponiamo che sia

$$A = QB + R = Q_1 B + R_1, \quad gr R < gr B \text{ e } gr R_1 < gr B.$$

Si ottiene

$$[Q - Q_1]B = R_1 - R.$$

Essendo il grado del polinomio a secondo membro minore di quello di B , deve essere tale anche il grado del polinomio a primo membro. Ma ciò è possibile se e solo se $Q - Q_1$ è il polinomio nullo. È dunque $Q = Q_1$ e, quindi, $R = R_1$. ■

Al solito, Q e R sono detti, rispettivamente, il quoziente e il resto della divisione. Se R è il polinomio nullo, si dice che A è *divisibile* per B .

Sia dato un polinomio P . Ogni volta che si attribuisce un valore all'indeterminata x si ottiene un numero reale $P(x)$. Si è così costruita una funzione di \mathbb{R} in \mathbb{R} detta *funzione razionale intera rappresentata dal polinomio* e che si indica ancora con P .

Vedremo tra poco che polinomi diversi individuano funzioni razionali diverse, ossia che c'è corrispondenza biunivoca tra i polinomi e le funzioni razionali intere. Il grado del polinomio può dunque essere assunto come *grado* della funzione razionale intera da esso individuata.

DEFINIZIONE. Dato un polinomio P , si dice che un numero reale α è una sua *radice* o che α è uno *zero* della funzione razionale P se è $P(\alpha) = 0$.

TEOREMA 4 (di Cartesio - Ruffini). *Un numero reale α è radice di un polinomio P se e solo se P è divisibile per $x - \alpha$.*

DIM. Dividendo P per $x - \alpha$, si ha

$$P(x) = Q(x)(x - \alpha) + r, \text{ con } r \in \mathbb{R},$$

da cui $P(\alpha) = r$. È dunque $P(\alpha) = 0$ se e solo se è $r = 0$. ■

TEOREMA 5 (Principio di identità dei polinomi). *Un polinomio P di grado minore o uguale a n (≥ 0) non può avere più di n radici distinte.*

DIM. Dato il polinomio P di grado $n > 0$, siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ n sue radici distinte. Per il Teorema di Cartesio - Ruffini, si ha $P(x) = Q_1(x)(x - \alpha_1)$. Essendo $\alpha_1 \neq \alpha_2$ e $P(\alpha_2) = 0$, deve essere $Q_1(\alpha_2) = 0$. È dunque $Q_1(x) = Q_2(x)(x - \alpha_2)$, da cui $P(x) = Q_2(x)(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)$. Così proseguendo, si ottiene $P(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\dots(x - \alpha_n)$, con $a \neq 0$. Nessun altro numero reale può dunque essere radice di $P(x)$. Per $n = 0$, la tesi è ovvia. ■

Questo risultato si può esprimere anche nel seguente modo:

TEOREMA 5' (Principio di identità dei polinomi). *Due polinomi di grado minore o uguale a n (≥ 0) che assumono valori uguali in più di n punti distinti sono lo stesso polinomio. Ne viene che: Polinomi distinti rappresentano funzioni razionali distinte.* ■

COROLLARIO 6. *Esiste uno e un solo polinomio di grado minore o uguale a n che nei punti x_0, x_1, \dots, x_n assume rispettivamente i valori y_0, y_1, \dots, y_n .* ■

L'unicità segue banalmente dal Teorema precedente; l'esistenza di questo polinomio, detto *polinomio interpolatore*, si dimostra costruendo effettivamente un polinomio che fa al caso. Questa costruzione si ottiene generalizzando quella che ora illustreremo in un caso concreto.

ESEMPIO. Cerchiamo il polinomio P , di grado ≤ 3 , per cui si ha: $P(-1) = 6$, $P(0) = 4$, $P(1) = 5$, $P(2) = -8$. Il polinomio P può essere così definito:

$$P(x) = 6 \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(-1-0)(-1-1)(-1-2)} + 4 \frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(0+1)(0-1)(0-2)} +$$

$$+ 5 \frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)(1-0)(1-2)} - 8 \frac{(x+1)(x-0)(x-1)}{(2+1)(2-0)(2-1)}.$$

DEFINIZIONE. Dato un polinomio P , si dice che un numero reale α è una sua radice di molteplicità r se P è divisibile per $(x - \alpha)^r$, ma non per $(x - \alpha)^{r+1}$. In altre parole, α è radice di molteplicità r per P se è $P(x) = Q(x)(x - \alpha)^r$, con $Q(\alpha) \neq 0$. Se la molteplicità di una radice α è 1, 2, 3, ..., r , si dice che α è radice *semplice*, *doppia*, *tripla*, ..., *r -pla*.

Per esempio, il polinomio $P(x) = (x - 1)(x^2 - 1)$ ha la radice -1 semplice e la radice 1 doppia.

DEFINIZIONE. Un polinomio è detto *riducibile* se può essere scritto come prodotto di due polinomi non costanti. In caso contrario si dice che il polinomio è *irriducibile*.

Tutti i polinomi di grado minore o uguale a 1 sono ovviamente irriducibili. Tutti i polinomi di grado maggiore di 1 che ammettono radici reali sono riducibili (Teor. 4). I polinomi di grado 2 irriducibili sono tutti e soli quelli che non hanno radici reali, ossia quelli con il discriminante minore di 0. Osserviamo che il polinomio $(x^2 + 1)(x^2 + 2)$ è riducibile, ma non ha radici reali.

Così come si definiscono i polinomi a coefficienti reali, si definiscono i polinomi a coefficienti nel campo complesso. Dunque un polinomio a coefficienti complessi è un'espressione del tipo

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_1 z + a_0, \text{ con } a_i \in \mathbb{C}.$$

Ogni volta che si attribuisce un valore complesso all'indeterminata z si ottiene un numero complesso $P(z)$. Si è così costruito una funzione di \mathbb{C} in \mathbb{C} detta *funzione razionale intera rappresentata dal polinomio* e che si indica ancora con $P(z)$.

Tutte le definizioni e i risultati fin qui stabiliti a proposito dei polinomi a coefficienti reali si estendono in modo del tutto naturale al caso dei polinomi a coefficienti complessi.

Sussiste il seguente risultato del quale non possiamo portare la dimostrazione:

TEOREMA 7 (Teorema fondamentale dell'Algebra). *Ogni polinomio non costante a coefficienti complessi ha in \mathbb{C} almeno una radice.* ■

Da questo risultato e dal Teorema 4 si ottiene il

COROLLARIO 7'. *Ogni polinomio non costante a coefficienti complessi si scompone in \mathbb{C} in fattori di primo grado.* ■

Dato un polinomio a coefficienti complessi P , indichiamo con \overline{P} il polinomio che ha come coefficienti i complessi coniugati di quelli di P . Dato che il coniugato della somma è la somma dei coniugati e che il coniugato del prodotto è il prodotto dei coniugati, si ottiene l'uguaglianza

$$\overline{P(\overline{z})} = \overline{P(z)}.$$

TEOREMA 8.- *Se un polinomio a coefficienti reali ammette una radice complessa non reale α , allora ammette anche la complessa coniugata $\bar{\alpha}$ e con la stessa molteplicità.*

DIM. Siano P un polinomio a coefficienti reali e α una sua radice non reale. Si ha:

$$P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)} = \overline{0} = 0.$$

Dunque anche $\bar{\alpha}$ è radice di $P(z)$. Proviamo che α e $\bar{\alpha}$ hanno anche la stessa molteplicità. Siano r ed s le molteplicità di α e, rispettivamente, di $\bar{\alpha}$. Non è restrittivo supporre $r \geq s$. Si ha:

$$P(z) = (z - \alpha)^r (z - \bar{\alpha})^s Q(z), \quad \text{con } Q(\alpha) \neq 0 \neq Q(\bar{\alpha});$$

$$P(z) = [(z - \alpha)(z - \bar{\alpha})]^s (z - \alpha)^{r-s} Q(z) = [z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha}]^s Q_1(z).$$

I polinomi $P(z)$ e $[z^2 - (\alpha + \bar{\alpha})z + \alpha\bar{\alpha}]^s$ sono a coefficienti reali; è dunque tale anche il polinomio $Q_1(z)$ che è il loro quoziente. Ora, se fosse $r > s$, si avrebbe $Q_1(\alpha) = 0$ e $Q_1(\bar{\alpha}) \neq 0$. Ma ciò sarebbe assurdo. ■

TEOREMA 9. Ogni polinomio a coefficienti reali è scomponibile nel campo reale in fattori di primo grado e fattori di secondo grado con discriminante negativo.

DIM. Il polinomio dato si può scomporre in \mathbb{C} nel prodotto

$$a(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_r)(x - \alpha_1)(x - \bar{\alpha}_1) \dots (x - \alpha_s)(x - \bar{\alpha}_s),$$

con gli a_i radici reali e gli α_j radici complesse non reali. La tesi segue ora subito dal fatto che i fattori

$$(x - \alpha_i)(x - \bar{\alpha}_i) = x^2 - (\alpha_i + \bar{\alpha}_i)x + \alpha_i\bar{\alpha}_i$$

sono polinomi a coefficienti reali privi di radici reali. ■

DEFINIZIONE. Si chiama *funzione razionale* ogni funzione che sia rappresentabile come rapporto di due polinomi, ossia ogni funzione $f: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ (o $f: E(\subset \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$) definita da $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$, con A e B polinomi.

Il dominio E di una simile funzione è dato da tutti gli $x \in \mathbb{R}$ (o $x \in \mathbb{C}$) per cui è $B(x) \neq 0$.

§ 3. LA FUNZIONE ESPONENZIALE

Potenze con esponente intero

La potenza a^n con esponente appartenente a \mathbb{N}^+ può essere così definita per ricorrenza:

DEFINIZIONE. Per ogni $a \in \mathbb{R}$, si pone:

$$a^1 = a; \quad a^{n+1} = a \times a^n; \quad n \in \mathbb{N}^+.$$

È dunque, in particolare, $1^n = 1; 0^n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$

Si dimostrano poi, sempre per induzione, le seguenti ben note proprietà delle potenze (dalle quali derivano tutte le altre):

- 1) $a^n \times a^m = a^{n+m}$;
- 2) $(a^n)^p = a^{np}$;
- 3) $a^n \times b^n = (ab)^n$.

Estendendo il significato di *potenza* ai casi di esponenti interi, razionali o reali, si chiede di mantenere la validità di queste proprietà. Si chiede inoltre, ovviamente, che le nuove definizioni subordinino quelle precedenti.

Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, resta così definita la funzione *potenza* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = x^n.$$

Per $n = 1$, si ha l'identità e non c'è niente da aggiungere. Sia dunque $n > 1$.

Sappiamo che $f(x) = x^n$ è una funzione *pari* [*dispari*] se n è pari [*dispari*]. Basta dunque studiarla per $x \geq 0$. Si vede subito che per tali x la nostra funzione è positiva (salvo che in 0), crescente e superiormente illimitata (è cioè superiormente illimitato l'insieme immagine $f(\mathbb{R}^+)$).

TEOREMA 10. Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ e per ogni numero reale positivo a , esiste uno ed un solo numero positivo α tale che $\alpha^n = a$.

Cenno di dim. L'unicità segue subito dalla monotonia; occupiamoci dell'esistenza, limitandoci al caso $n = 2$. (Per $n > 2$ si procede in modo analogo. Il caso $n = 1$ è banale.)

Dato $a > 0$, consideriamo i due insiemi di numeri reali positivi:

$$C = \{c \in \mathbb{R}^+ : c^2 < a\}; \quad D = \{d \in \mathbb{R}^+ : d^2 > a\}.$$

Si ha, certamente, $a + 1 \in D$ e $\min\{1; a\} \in C$; dunque le classi C e D non sono vuote e sono, come subito si vede, separate. Tali classi devono essere anche contigue. Se, infatti, così non fosse, esisterebbero almeno 2 numeri reali x e y compresi fra di esse; ma allora si avrebbe $t^2 = a$, per tutti i t tali che $x < t < y$; ma ciò è assurdo. Esiste dunque uno ed un solo numero reale α compreso fra le due classi. Si prova poi che è $\alpha^2 = a$. ■

Torneremo comunque sull'argomento del § 7 del prossimo Capitolo.

Se n è dispari, la funzione $f(x) = x^n$ è biiettiva da \mathbb{R} a \mathbb{R} e quindi invertibile. Se n è pari, questa funzione non è biiettiva. Per invertirla la si considera come definita da $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ in sé.

L'inversa della funzione $(y \Rightarrow) f(x) = x^n$ si indica con $(x \Rightarrow) f^{-1}(y) = \sqrt[n]{y}$.

Esponente 0. Se vogliamo conservare la validità della (1), deve essere $a^n = a^{n+0} = a^n \times a^0$, da cui $a^0 = 1$. Tutto va bene se è $a \neq 0$; ma per $a = 0$ la cosa non va così liscia. Torneremo su ciò più avanti (cfr. Cap. 5).

Esponente intero negativo. Sempre se si vuole far salva la validità della (1), si ha: $1 = a^0 = a^{n-n} = a^n \times a^{-n}$. Si arriva così alla nota

DEFINIZIONE. Se è $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}^+$, si definisce $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

In questo caso, la condizione $a \neq 0$ è fuori discussione.
Si verifica facilmente la validità delle proprietà (1), (2) e (3).

Potenze con esponente razionale

Come dar significato all'espressione $a^{1/n}$? Se vogliamo salvare la (2) deve essere $a = a^{n/n} = (a^{1/n})^n$. Vogliamo inoltre che da $m/n = p/q$ segua $a^{m/n} = a^{p/q}$ (proprietà *invariantiva*). Si può dunque dare la

DEFINIZIONE. Se è $a > 0$, si definisce $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$, ($n > 1$); $a^{m/1} = a^m$.
Per ogni numero razionale *positivo* r si definisce $0^r = 0$.

Si vede subito che sono soddisfatte le (1), (2), (3) e la proprietà invariantiva. Dunque va tutto bene. E per $a < 0$?

Noi sappiamo che, essendo \mathbb{R} un corpo ordinato, il quadrato di un numero reale non nullo è positivo. Ma ora, *qualunque sia* la definizione che vogliamo dare al simbolo $(-2)^{1/2}$, si ha: $-2 = (-2)^1 = (-2)^{2/2} = ((-2)^{1/2})^2 > 0$. E questo proprio non va! Quindi:

Non è possibile definire le potenze con esponente razionale e base negativa in modo ragionevole, ossia in modo da conservare, oltre alla validità delle proprietà (1), (2), (3), anche la compatibilità con la relazione d'ordine e la subordinazione agli esponenti interi.

Dato un numero reale *positivo* a , resta definita la funzione di \mathbb{Q} in \mathbb{R} $f(x) = a^x$. È una funzione positiva. Se è $a = 1$, si ha una funzione costante; se è $a \neq 1$, la funzione è illimitata, monotona crescente se è $a > 1$, decrescente se è $0 < a < 1$. È appena il caso di notare che anche se a è razionale, non è affatto detto che a^x sia razionale.

Potenze con esponente reale

Come definire in modo ragionevole a^α con $a > 0$ e $\alpha \in \mathbb{R}$?
Sia intanto $a > 1$. Consideriamo i due insiemi

$$C = \{a^r: (r \in \mathbb{Q}) \wedge (r < \alpha)\}, \quad D = \{a^s: (s \in \mathbb{Q}) \wedge (s > \alpha)\}.$$

Per la monotonia della funzione $f(x) = a^x$, sempre con $x \in \mathbb{Q}$, queste due classi sono separate. Proviamo che sono anche contigue.

LEMMA 11. *Dato il numero reale $a > 1$, per ogni numero reale $\sigma > 0$, esiste un numero naturale $n > 0$ tale che $a^{1/n} < 1 + \sigma$.*

DIM. La tesi equivale all'esistenza di un n per cui si abbia

$$a < (1 + \sigma)^n = 1 + n\sigma + k, \quad \text{con } k > 0.$$

Ma a tal fine basta che sia $1 + n\sigma > a$, ossia $n > \frac{a-1}{\sigma}$. ■

TEOREMA 12. *Le classi C e D sopra definite sono contigue.*

DIM. Fissiamo un numero reale $\varepsilon > 0$ e un $k \in \mathbb{Q}$, con $k > \alpha$. Proviamo che esistono $r, s \in \mathbb{Q}$, con $r < \alpha < s < k$, tali che $a^s - a^r < \varepsilon$. Da $r < \alpha < s < k$ si ha:

$$a^s - a^r = a^r (a^{(s-r)} - 1) < a^k (a^{(s-r)} - 1),$$

che è minore di ε se e solo se è $a^{s-r} < 1 + \frac{\varepsilon}{a^k} = 1 + \sigma$. Per il Lemma, esiste un naturale n tale che $a^{1/n} < 1 + \sigma$. Basta quindi prendere r ed s , con $s < k$, tali che $s - r < 1/n$. ■

Ha dunque senso la

DEFINIZIONE. Dati i numeri reali a e α , con $a > 0$, si definisce il numero reale a^α come segue:

se è $a > 1$, è $a^\alpha := \sup \{a^r : (r \in \mathbb{Q}) \wedge (r < \alpha)\} = \inf \{a^s : (s \in \mathbb{Q}) \wedge (s > \alpha)\};$

se è $0 < a < 1$, è $a^\alpha := \frac{1}{(1/a)^\alpha};$

se è $a = 1$ $1^\alpha := 1.$

Si definisce poi, per ogni $\alpha > 0$, $0^\alpha := 0.$

(La definizione di a^α , con $0 < a < 1$, può naturalmente essere data in maniera diretta, come per il caso $a > 1$, tenendo presente che ora la funzione $f(x) = a^x$, con $x \in \mathbb{Q}$, è decrescente.)

Si prova poi, con un po' di fatica, il

TEOREMA 13. Con la definizione di a^α sopra data restano soddisfatte le proprietà formali delle potenze. ■

Dalla stessa definizione si ottiene invece facilmente il seguente risultato (Esercizio!):

TEOREMA 14. La definizione di a^α sopra data coincide, nel caso che α sia razionale, con quella data in precedenza. ■

La funzione esponenziale

Per ogni numero reale $a > 0$, resta così definita la funzione $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, espressa da $f(x) = a^x$, detta *funzione esponenziale di base a* .

Dalla stessa definizione si ha immediatamente il

TEOREMA 15. La funzione reale di variabile reale f definita da $f(x) = a^x$ è positiva ed è crescente per $a > 1$, decrescente per $0 < a < 1$, costante per $a = 1$. ■

TEOREMA 16. Se a è un numero reale positivo e diverso da 1, la funzione $f(x) = a^x$ assume tutti i valori reali positivi (e una volta sola). Ossia: la funzione $f(x) = a^x$ ($a \neq 1$) di \mathbb{R} in \mathbb{R}^+ è biiettiva e quindi invertibile.

Cenno di dim. Siano $a > 1$ e $b > 0$; cerchiamo un α tale che $a^\alpha = b$. Siano:

$$C = \{c \in \mathbb{R} : a^c < b\}; \quad D = \{d \in \mathbb{R} : a^d > b\}.$$

Le classi C e D sono non vuote e separate, anzi contigue; infatti se ci fossero due elementi x e y compresi fra C e D , dovrebbe risultare $a^t = b$, per ogni t tale che $x < t < y$, contro la crescenza della funzione esponenziale. Sia α l'unico elemento compreso fra C e D . Si prova poi che è $a^\alpha = b$. ■

Anche su questo punto ritorneremo nel § 7 del prossimo Capitolo.

§ 4. LA FUNZIONE LOGARITMO

Dato che, per $a \neq 1$, la funzione esponenziale a^x è biiettiva tra \mathbb{R} e \mathbb{R}^+ , ha senso la seguente

DEFINIZIONE. Se a e b sono due numeri reali positivi, con $a \neq 1$, l'unico numero reale α tale che $a^\alpha = b$ prende il nome *logaritmo in base a di b* e si indica con la scrittura $\log_a b$.

Data la funzione $(x \mapsto) g(y) = a^y$, con $0 < a \neq 1$, la sua funzione inversa è dunque indicata con $(y \mapsto) f(x) = \log_a x$.

TEOREMA 17. La funzione $f(x) = \log_a x$, con $0 < a \neq 1$, è definita su \mathbb{R}^+ ed assume tutti i valori reali. È crescente se è $a > 1$, decrescente se è $0 < a < 1$. ■

Per la stessa definizione di funzione inversa, si ha:

TEOREMA 18. (1) $\log_a a^x = x$;
 (2) $a^{\log_a x} = x$, se è $x > 0$;
 (3) $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$. ■

Dalla monotonia delle funzioni esponenziale ($a \neq 1$) e logaritmica si ottiene il seguente risultato molto utile in pratica:

TEOREMA 19. Fissiamo un numero reale positivo $a \neq 1$. Quali che siano i numeri reali x e y , si ha:

$$\begin{aligned} x = y &\Leftrightarrow a^x = a^y; \\ x < y &\Leftrightarrow a^x < a^y, \quad \text{se è } a > 1; \\ x < y &\Leftrightarrow a^x > a^y, \quad \text{se è } a < 1. \end{aligned}$$

Quali che siano i numeri reali positivi x e y , si ha:

$$\begin{aligned} x = y &\Leftrightarrow \log_a x = \log_a y; \\ x < y &\Leftrightarrow \log_a x < \log_a y, \quad \text{se è } a > 1; \\ x < y &\Leftrightarrow \log_a x > \log_a y, \quad \text{se è } a < 1. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Da questa osservazione discendono subito le proprietà dei logaritmi.

TEOREMA 20. Quali che siano i numeri reali a, b, c, p , con a, b, c positivi, $a \neq 1$, si ha:

(1) $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$;

(2) $\log_a b^p = p \log_a b$,

da cui

(3) $\log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$.

Se poi è anche $c \neq 1$, si ha:

(4) $\log_a b = \log_a c \times \log_c b$,

da cui, se è $a = b$,

(5) $\log_a c = \frac{1}{\log_c a}$.

DIM. Proviamo, per esempio, la (4). Questa equivale alla

$$(4') \quad a^{\log_a b} = a^{\log_a c \times \log_c b};$$

Primo membro: $\dots = b;$

secondo membro: $\dots = (a^{\log_a c})^{\log_c b} = c^{\log_c b} = b.$

Le altre proprietà si provano in modo perfettamente analogo (Esercizio!). ■

La funzione potenza x^α

Sia α un numero reale prefissato. Qual è il dominio E della funzione $f(x) = x^\alpha$?

α intero positivo $\rightarrow E = \mathbb{R};$

α intero negativo $\rightarrow E = \mathbb{R} \setminus \{0\};$

$\alpha = 0 \rightarrow E = \mathbb{R} \setminus \{0\};$ non conviene dare significato al simbolo 0^0 ;

$\alpha > 0$ non intero $\rightarrow E = \mathbb{R}^+ \cup \{0\};$

$\alpha < 0$ non intero $\rightarrow E = \mathbb{R}^+.$

La funzione $f(x)^{g(x)}$

Qual è il dominio di una funzione del tipo $F(x) = f(x)^{g(x)}$?

Il dominio di una funzione di variabile reale è, per definizione, l'insieme di *tutti* i numeri reali per cui ha senso quello che c'è scritto. Dunque, detto A il dominio di g , il dominio E della F è dato da:

$$E = [\{x: f(x) > 0\} \cap A] \cup [\{x: f(x) = 0\} \cap \{x: g(x) > 0\}] \cup [\{x: f(x) < 0\} \cap \{x: g(x) \text{ è un numero intero}\}].$$

Ma quando si studia una funzione di questo tipo, si accetta solitamente come dominio l'insieme

$$E' = A \cap \{x: f(x) > 0\}.$$

Notiamo che solo per tali x si può esprimere la funzione F nella comoda forma

$$F(x) = a^{g(x) \log_a f(x)}, \text{ con } 0 < a \neq 1.$$

§ 5. IL NUMERO e

Ci si può chiedere quale sia la base più naturale per esponenziali e logaritmi. Ebbene, la base più naturale per esponenziali e logaritmi non è, come si potrebbe pensare a prima vista, il numero 10, ma un numero irrazionale trascendente compreso fra 2 e 3 che si indica con il simbolo e di cui daremo ora la definizione.

LEMMA 21. Dati n numeri reali positivi, a_1, a_2, \dots, a_n tali che $a_1 + a_2 + \dots + a_n = n$, si ha $a_1 a_2 \dots a_n \leq 1$.

DIM. Per induzione su n .

$n = 2$. Siano dati due numeri reali positivi a e b tali che $a + b = 2$. Se è $a = b = 1$ la tesi è ovvia. In caso contrario, si ha $a = 1 - \alpha$ e $b = 1 + \alpha$, da cui $ab = (1 - \alpha)(1 + \alpha) = 1 - \alpha^2 < 1$.

Passo dell'induzione. Siano dati $n + 1$ numeri positivi $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ tali che $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = n + 1$. Se tutti gli a_i sono uguali a 1, la tesi è ovvia. In caso contrario, non è restrittivo supporre che sia $a_0 = 1 + \alpha$ e $a_1 = 1 - \beta$, con α e β positivi. Posto $b_1 = 1 + \alpha - \beta (> 0)$, si ha

$$a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + b_1 + a_2 + \dots + a_n = n + 1,$$

da cui

$$b_1 + a_2 + \dots + a_n = n.$$

Per l'ipotesi induttiva, si ha

$$b_1 a_2 \dots a_n \leq 1.$$

Essendo $a_0 a_1 = (1 + \alpha)(1 - \beta) = 1 - \beta + \alpha - \alpha\beta < 1 - \beta + \alpha = b_1$, è anche $a_0 a_1 a_2 \dots a_n < 1$. ■

TEOREMA 22. Dati n numeri reali positivi, a_1, a_2, \dots, a_n , si ha

$$(*) \quad \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}.$$

DIM. Posto $M = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$, si ha $\frac{a_1}{M} + \frac{a_2}{M} + \dots + \frac{a_n}{M} = n$, da cui, per il Lemma precedente, $\sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \dots a_n}{M^n}} \leq 1$, che equivale alla (*). ■

Consideriamo ora le due seguenti classi numeriche

$$A = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n : n \in \mathbb{N}^+ \right\} = \{a_n : n \in \mathbb{N}^+\};$$

$$B = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} : n \in \mathbb{N}^+ \right\} = \{b_n : n \in \mathbb{N}^+\}.$$

TEOREMA 23. 1) La successione $(a_n)_n$ è crescente e la successione $(b_n)_n$ è decrescente.

2) Le classi A e B sono contigue.

DIM. 1) Proviamo che è $a_n \leq a_{n+1}$. Ciò equivale a dimostrare che è

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \leq 1 + \frac{1}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

Ora, in virtù del Teorema precedente, si ha:

$$\sqrt[n+1]{1 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} \leq \frac{1 + n \left(1 + \frac{1}{n} \right)}{n+1} = \frac{n+2}{n+1}.$$

La decrescenza della successione $(b_n)_n$ si prova in modo analogo, ma con qualche piccolo fastidio in più.

2) Avendosi $a_n \leq a_{n+m} < b_{n+m} \leq b_m$, si ha intanto che le due classi A e B sono separate. Essendo poi

$$b_n - a_n = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n < \frac{1}{n} b_1 = \frac{4}{n},$$

si conclude che le classi A e B sono anche contigue. ■

DEFINIZIONE. L'unico elemento separatore fra le classi A e B si indica con la lettera e .

È dunque, per definizione,

$$e := \sup \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n : n \in \mathbb{N}^+ \right\} = \inf \left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} : n \in \mathbb{N}^+ \right\}.$$

Come si è detto, e è un numero irrazionale trascendente. Si ha $e = 2,718281828\dots$

DEFINIZIONE. I logaritmi in base e sono detti *logaritmi naturali*. In questo caso si omette l'indicazione della base; è dunque $\log x := \log_e x$. (Si usa anche la notazione $\ln x$.)

I logaritmi in base 10 sono detti *logaritmi volgari* o *di Briggs* e si indicano con la 'elle' maiuscola; è dunque $\text{Log } x := \log_{10} x$.

§ 6. LE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Penseremo gli angoli non come parti del piano individuate da una coppia di semirette con l'origine in comune, ma come *le rotazioni di una semiretta attorno alla sua origine*. Così facendo avrà senso considerare anche angoli *maggiori di un angolo giro* e angoli *negativi*.

Siccome ci sono due possibili versi di rotazione, bisogna decidere qual è quello positivo. Se fissiamo in un piano un sistema di coordinate cartesiane (ortogonali e monometriche), accettiamo come positivo il verso che porta il semiasse positivo delle ascisse sul semiasse positivo delle ordinate secondo un angolo convesso (nella fattispecie, retto). Ciò comporta che, se la disposizione degli assi è quella usuale, il verso positivo delle rotazioni è quello *antiorario*.

Sappiamo che la lunghezza del perimetro di un poligono regolare è proporzionale alla sua apotema, cioè al raggio della circonferenza circoscritta. Sappiamo anche che la lunghezza della circonferenza è data dall'estremo superiore delle misure dei perimetri dei poligoni (regolari) inscritti e dall'estremo inferiore delle misure dei perimetri dei poligoni (regolari) circoscritti. Da questo segue che la lunghezza di una circonferenza è proporzionale al suo raggio. Sappiamo che il rapporto tra lunghezza della circonferenza e raggio si indica con 2π .

Da questo fatto segue che anche la lunghezza di un arco di circonferenza è proporzionale al raggio della circonferenza cui esso appartiene. Questo rapporto è direttamente proporzionale alla lunghezza dell'arco o, se si preferisce, all'ampiezza del corrispondente angolo al centro. Dunque il rapporto tra la lunghezza dell'arco e il raggio può essere assunto come misura dell'angolo al centro. Si ha così la misura degli angoli in *radianti*.

Per passare dalla misura in radianti x di un angolo α alla corrispondente misura in gradi sessagesimali x° e viceversa, non c'è che da sfruttare la proporzione

$$x : \pi = x^\circ : 180^\circ.$$

Si ottiene così, in particolare, la seguente tabella

x°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	180°	270°	360°
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

D'ora in poi, misureremo *sempre* gli angoli in *radianti*. Conveniamo, inoltre, di misurare gli angoli a partire dal semiasse positivo delle ascisse. Siccome la misura di un angolo è la misura orientata di un arco, assegnare un angolo equivale ad assegnare un numero reale.

Si chiama *circonferenza trigonometrica* o *goniometrica* la circonferenza Γ con centro nell'origine O e raggio 1. Su di essa consideriamo i punti $A(1, 0)$, $B(0, 1)$, $A'(-1, 0)$ e $B'(0, -1)$. Ogni semiretta r uscente da O individua ed è individuata dal suo punto $P(r)$ di intersezione con Γ .

Un angolo α individua chiaramente una semiretta $r(\alpha)$ e quindi un punto $P(\alpha) \in \Gamma$. Si tenga però presente che angoli che differiscono per multipli interi di 2π individuano la stessa semiretta e quindi lo stesso punto $P \in \Gamma$.

DEFINIZIONE. Dato un angolo α , ciò che è lo stesso, un numero reale x , l'ascissa e l'ordinata del corrispondente punto $P(x) \in \Gamma$ prendono rispettivamente il nome di *coseno* e *seno* di x . Dunque, il punto $P(x)$ ha, per definizione, coordinate *coseno* di x e *seno* di x che si indicano con $\cos x$ e $\sin x$.

Si ottengono così due funzioni di \mathbb{R} in \mathbb{R} che, per quanto precede, sono periodiche di periodo 2π .

DEFINIZIONE. Per ogni numero reale x , con $x \notin \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$, si chiama *tangente* di x il numero reale $\operatorname{tg} x := \frac{\sin x}{\cos x}$.

Si ottiene così una funzione di $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$ in \mathbb{R} che, come si constata facilmente, è periodica di periodo π .

La retta OP , se non è parallela all'asse delle ordinate, incontra la retta di equazione $x = 1$ in un punto T . Sia poi H il punto di coordinate $(\cos x, 0)$. Dalla similitudine dei triangoli rettangoli $\Delta(OHP)$ e $\Delta(OAT)$ si ricava che l'ordinata del punto T è data da $\operatorname{tg} x$. Ciò fornisce l'interpretazione geometrica della tangente e ne spiega il nome.

Segnaliamo, ma senza insistere su ciò, le seguenti definizioni:

$$\sec x := \frac{1}{\cos x}; \quad \operatorname{cosec} x := \frac{1}{\sin x}; \quad \operatorname{ctg} x := \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Da facili considerazioni su triangoli rettangoli o equilateri si ha intanto la seguente tabella

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	—	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0

Guardando la circonferenza goniometrica e con il confronto di opportuni triangoli si ottiene la seguente tabella che esprime i valori delle funzioni seno, coseno e tangente di angoli *associati* ad un dato angolo x .

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$	$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$	$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
$\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} x}$	$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} x}$	$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$

$\sin(x \pm \pi) = -\sin x$	$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(-x) = -\sin x$
$\cos(x \pm \pi) = -\cos x$	$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(-x) = \cos x$
$\operatorname{tg}(x \pm \pi) = \operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$	$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$

In particolare, le funzioni *seno* e *tangente* sono *dispari*, e la funzione *coseno* è *pari*. Stabiliamo ora alcune formule di particolare utilità.

Identità fondamentale

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Basta ricordare che $\cos x$ e $\sin x$ sono l'ascissa e l'ordinata di un punto della circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

Formule della somma e formule di duplicazione

$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$	$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$	$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$
$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$	$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$

$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$	$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$	$\operatorname{tg}(2\alpha) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$
---	---	--

DIM. Si considerino i punti della circonferenza trigonometrica

$$P(\cos \alpha, \sin \alpha), Q(\cos \beta, \sin \beta), R(\cos(\alpha - \beta), \sin(\alpha - \beta)).$$

Dalla congruenza dei triangoli $\Delta(POQ)$ e $\Delta(AOR)$, si ottiene $\overline{PQ} = \overline{AR}$, da cui

$$(\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = (1 - \cos(\alpha - \beta))^2 + \sin^2(\alpha - \beta).$$

Si deduce immediatamente la formula per il $\cos(\alpha - \beta)$. Da questa si ottengono poi facilmente le altre. (Esercizio!) ■

Formule di bisezione

$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$	$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$	$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$
--	--	---

DIM. Si parte dalle uguaglianze $\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ e si ricavano $\sin \alpha$ e $\cos \alpha$. Poi basta sostituire α al posto di 2α . ■

Seno, coseno e tangente in funzione della tangente dell'angolo metà

Posto $t = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, si ha:

$\sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$	$\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2t}{1 - t^2}$
------------------------------------	---	---

$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$
--

DIM. Si parte dalle uguaglianze: $\cos(2\alpha) = \frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$, $\sin(2\alpha) = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}$; poi si divide sopra e sotto per $\cos^2 \alpha$. In fine basta sostituire α al posto di 2α .

Per l'ultima formula, si parte dall'uguaglianza $\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, da cui

$$t^2 = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{(1 + \cos \alpha)^2}.$$

Poi basta osservare che le funzioni $\sin \alpha$ e $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$ hanno lo stesso segno. ■

Formule di prostaferesi

$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$	$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$
$\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$	$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

DIM. Dapprima si sommano e sottraggono le formule che danno $\sin(\alpha + \beta)$ e $\sin(\alpha - \beta)$, poi quelle che danno $\cos(\alpha + \beta)$ e $\cos(\alpha - \beta)$. In fine, si pone $\alpha + \beta = p$ e $\alpha - \beta = q$. ■

L'equazione lineare in seno e coseno

Si consideri un'equazione del tipo

$$a \sin x + b \cos x + c = 0.$$

Posto $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, l'equazione può essere scritta nella forma

$$\frac{a}{\rho} \sin x + \frac{b}{\rho} \cos x = -\frac{c}{\rho}.$$

Essendo $\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{b}{\rho}\right)^2 = 1$, esiste uno e un solo $\alpha \in [0; 2\pi[$ tale che $\frac{a}{\rho} = \cos \alpha$ e $\frac{b}{\rho} = \sin \alpha$ [esiste uno e un solo $\beta \in [0; 2\pi[$ tale che $\frac{a}{\rho} = \sin \beta$ e $\frac{b}{\rho} = \cos \beta$]. L'equazione data può dunque essere scritta nella forma

$$\sin(x + \alpha) = -\frac{c}{\rho} \quad [\cos(x - \beta) = -\frac{c}{\rho}],$$

che è di tipo elementare.

ESEMPIO. Si consideri l'equazione

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x + 1 = 0.$$

Si ha $\sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$. Scritta l'equazione data nella forma

$$\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x + \frac{1}{2} = 0,$$

questa diventa $\sin \frac{\pi}{6} \sin x + \cos \frac{\pi}{6} \cos x = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2},$

le cui soluzioni sono date da

$$x - \frac{\pi}{6} = \pm \frac{2}{3}\pi + 2k\pi.$$

Le soluzioni della nostra equazione sono dunque date da

$$(x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi) \vee (x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi).$$

Le funzioni trigonometriche inverse

Le funzioni seno, coseno e tangente, essendo periodiche, non sono certamente invertibili. Per renderle tali, si considerano opportune restrizioni.

La funzione arco seno. Per invertire la funzione seno, la si restringe all'intervallo chiuso $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e si assume come codominio l'intervallo $I' = [-1, 1]$. La funzione seno è biiettiva tra I e I' ; è perciò invertibile.

La sua funzione inversa è detta *arco seno* ed è indicata con $\arcsin x$.

La funzione $\arcsin x$ è dunque una funzione definita in $I' = [-1, 1]$ ed ha come insieme imma-

gine l'intervallo $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. È una funzione dispari e crescente.

La funzione arco coseno. Per invertire la funzione coseno, la si restringe all'intervallo chiuso $J = [0; \pi]$ e si assume come codominio l'intervallo $J' = [-1, 1]$. La funzione coseno è biiettiva tra J e J' ; è perciò invertibile.

La sua funzione inversa è detta *arco coseno* ed è indicata con $\arccos x$.

La funzione $\arccos x$ è dunque una funzione definita in $J' = [-1, 1]$ ed ha come insieme immagine l'intervallo $J = [0, \pi]$. È una funzione decrescente.

La funzione arco tangente. Per invertire la funzione tangente, la si restringe all'intervallo aperto $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. La funzione tangente è biiettiva tra I e \mathbb{R} ; è perciò invertibile.

La sua funzione inversa è detta *arco tangente* ed è indicata con $\arctg x$.

La funzione $\arctg x$ è dunque una funzione definita in \mathbb{R} , ha come insieme immagine l'intervallo $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. È una funzione dispari e crescente.

§ 7. LA FORMA TRIGONOMETRICA DEI NUMERI COMPLESSI

Sappiamo che in un piano si possono introdurre, accanto alle coordinate cartesiane, anche quelle polari assegnando ad ogni punto P la distanza ρ dall'origine O e l'angolo ϑ (definito a meno di multipli di 2π) che la semiretta OP forma con il semiasse positivo delle ascisse. Ciò vale dunque anche per i numeri complessi.

Dato un numero complesso $z = x + yi$, si ponga $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$. Il numero non negativo ρ è detto il *modulo* di z . Si ha, ovviamente, $\rho = 0$ se e solo se $z = 0$.

Geometricamente, il modulo esprime la distanza che il numero z ha dal punto 0 nel piano di Gauss.

Sia ora $z \neq 0$. Si ha: $z = \rho \left(\frac{a}{\rho} + \frac{b}{\rho} i \right)$. Essendo $\left(\frac{a}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{b}{\rho}\right)^2 = 1$, esiste uno ed un solo angolo $\vartheta \in [0, 2\pi[$ tale da aversi $\frac{a}{\rho} = \cos \vartheta$ e $\frac{b}{\rho} = \sin \vartheta$. Si ha dunque

$$z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta).$$

Il numero reale ϑ è detto l'*argomento* o l'*anomalia* del numero complesso z . Se $z = 0$, la sua anomalia è arbitraria o, se si preferisce, indeterminata.

Dati due numeri reali $\rho (\geq 0)$ e ϑ , questi individuano univocamente il numero complesso $z = \rho(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)$. Inoltre, coppie di numeri reali (ρ, ϑ_1) e (ρ, ϑ_2) , con $\rho > 0$, individuano lo stesso numero complesso se e solo se risulta $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$. Ciò si esprime dicendo che l'argomento di un numero complesso $z \neq 0$ è individuato a meno di multipli interi di 2π .

Se un numero complesso z è assegnato mediante il suo modulo e il suo argomento, diremo che z è espresso in *forma trigonometrica* e scriveremo, in tal caso,

$$z = [\rho, \vartheta].$$

Le formule che permettono il passaggio dalla forma algebrica ($z = x + yi$) di un numero complesso a quella trigonometrica ($z = [\rho, \vartheta]$) e viceversa sono le seguenti, che discendono direttamente dalle definizioni precedenti:

$$x = \rho \cos \vartheta, \quad y = \rho \sin \vartheta, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

ESEMPLI. 1) Se è $z = [\rho, \vartheta]$, si ha $-z = [\rho, \vartheta + \pi]$; $\bar{z} = [\rho, -\vartheta]$.

2) Si ha: $[\pi, \pi] = -\pi$; $[2, 3] = 2(\cos 3 + i \sin 3)$.

$$5 = [5, 0]; \quad -1 = [1, \pi]; \quad 3i = \left[3, \frac{\pi}{2}\right]; \quad 1 + i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]; \quad 2 - 3i = \left[\sqrt{13}, -\arcsin \frac{3}{\sqrt{13}}\right].$$

La forma trigonometrica dei numeri complessi è molto comoda per eseguire prodotti e innalzamenti a potenza.

TEOREMA 24. 1) Dati $z_1 = [\rho_1, \vartheta_1]$ e $z_2 = [\rho_2, \vartheta_2]$, si ha

$$z_1 z_2 = [\rho_1 \rho_2, \vartheta_1 + \vartheta_2].$$

2) (Formule di De Moivre). Dati $z = [\rho, \vartheta]$ e $n \in \mathbb{N}^+$, si ha

$$z^n = [\rho^n, n\vartheta].$$

DIM. 1) Dati $z_1 = [\rho_1, \vartheta_1]$ e $z_2 = [\rho_2, \vartheta_2]$, si ha

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1(\cos \vartheta_1 + i \sin \vartheta_1) \rho_2(\cos \vartheta_2 + i \sin \vartheta_2) = \\ &= \rho_1 \rho_2 [(\cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 - \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2) + i(\cos \vartheta_1 \sin \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_2)] = \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\vartheta_1 + \vartheta_2) + i \sin(\vartheta_1 + \vartheta_2)] = [\rho_1 \rho_2, \vartheta_1 + \vartheta_2]. \end{aligned}$$

2) Per induzione su n . Per $n = 1$, la tesi è ovvia. Passo dell'induzione:

$$z^n = z z^{n-1} = [\rho, \vartheta][\rho^{n-1}, (n-1)\vartheta] = [\rho^n, n\vartheta]. \blacksquare$$

ESEMPLI. 3) Se è $z = [\rho, \vartheta]$, si ha $\frac{1}{z} = \left[\frac{1}{\rho}, -\vartheta\right]$.

4) Dalla (1) si riottiene immediatamente l'uguaglianza $\boxed{z \bar{z} = \rho^2}$.

5) Si ha: $(1 + i)^5 = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]^5 = \left[4\sqrt{2}, \frac{5\pi}{4}\right] = 4\sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = -4 - 4i$.

6) Sia $z = [1, \vartheta] \neq 1$ un numero complesso di modulo unitario. Partendo dall'uguaglianza

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z},$$

si ottiene

$$(1 + \cos \vartheta + \cos 2\vartheta + \dots + \cos(n-1)\vartheta) + i(\sin \vartheta + \sin 2\vartheta + \dots + \sin(n-1)\vartheta) =$$

74 - Capitolo Quarto

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 - \cos n\vartheta - i \sin n\vartheta}{1 - \cos \vartheta - i \sin \vartheta} = \frac{1 - \cos n\vartheta - i \sin n\vartheta}{1 - \cos \vartheta - i \sin \vartheta} \frac{1 - \cos \vartheta + i \sin \vartheta}{1 - \cos \vartheta + i \sin \vartheta} = \\
 &= \frac{(1 - \cos \vartheta)(1 - \cos n\vartheta) + \sin \vartheta \sin n\vartheta + i [(1 - \cos n\vartheta) \sin \vartheta - \sin n\vartheta(1 - \cos \vartheta)]}{(1 - \cos \vartheta)^2 + \sin^2 \vartheta}.
 \end{aligned}$$

Uguagliando le parti reali e quelle immaginarie, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 1 + \cos \vartheta + \cos 2\vartheta + \dots + \cos(n-1)\vartheta &= \frac{1 - \cos \vartheta - \cos n\vartheta + \cos \vartheta \cos n\vartheta + \sin \vartheta \sin n\vartheta}{2(1 - \cos \vartheta)} = \\
 &= \frac{1 - \cos \vartheta - \cos n\vartheta + \cos(n-1)\vartheta}{2(1 - \cos \vartheta)} = \frac{2(\cos \frac{(n-1)\vartheta}{2})^2 - 2\cos \frac{(n+1)\vartheta}{2} \cos \frac{(n-1)\vartheta}{2}}{4(\sin \frac{\vartheta}{2})^2} = \\
 &= \frac{\cos \frac{(n-1)\vartheta}{2} (\cos \frac{(n-1)\vartheta}{2} - \cos \frac{(n+1)\vartheta}{2})}{2(\sin \frac{\vartheta}{2})^2} = \frac{2\cos \frac{(n-1)\vartheta}{2} \sin \frac{n\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta}{2}}{2(\sin \frac{\vartheta}{2})^2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sin \vartheta + \sin 2\vartheta + \dots + \sin(n-1)\vartheta &= \frac{\sin \vartheta - \sin \vartheta \cos n\vartheta - \sin n\vartheta + \cos \vartheta \sin n\vartheta}{2(1 - \cos \vartheta)} = \\
 &= \frac{\sin \vartheta - \sin n\vartheta + \sin(n-1)\vartheta}{2(1 - \cos \vartheta)} = \frac{2\sin \frac{(n-1)\vartheta}{2} \cos \frac{(n-1)\vartheta}{2} - 2\sin \frac{(n-1)\vartheta}{2} \cos \frac{(n+1)\vartheta}{2}}{4(\sin \frac{\vartheta}{2})^2} = \\
 &= \frac{\sin \frac{(n-1)\vartheta}{2} (\cos \frac{(n-1)\vartheta}{2} - \cos \frac{(n+1)\vartheta}{2})}{2(\sin \frac{\vartheta}{2})^2} = \frac{2\sin \frac{(n-1)\vartheta}{2} \sin \frac{n\vartheta}{2} \sin \frac{\vartheta}{2}}{2(\sin \frac{\vartheta}{2})^2}.
 \end{aligned}$$

In conclusione, si ottengono le due utili formule:

$$1 + \cos \vartheta + \cos 2\vartheta + \dots + \cos(n-1)\vartheta = \frac{\cos \frac{(n-1)\vartheta}{2} \sin \frac{n\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}}$$

$$\sin \vartheta + \sin 2\vartheta + \dots + \sin(n-1)\vartheta = \frac{\sin \frac{(n-1)\vartheta}{2} \sin \frac{n\vartheta}{2}}{\sin \frac{\vartheta}{2}}$$

§ 8.- ESERCIZI

1) Su dusegnino i grafici delle seguenti funzioni di \mathbb{R} in \mathbb{R} :

$$|x|; \quad x + |x|; \quad 1 - |x - 1|; \quad \frac{1}{4}(|x + 2| + |x - 2| - 2|x|); \quad ||x - 1| + x| - x.$$

2) Fra le seguenti funzioni si ricerchino quelle che sono pari e quelle che sono dispari:

$$x^2 - |x| + 1; \quad \frac{\operatorname{tg} x}{x}; \quad x + \sin x; \quad x + \cos x; \quad x \sin^3 x; \quad \sqrt{1 - 2 \cos x}; \quad x^2 \operatorname{arctg} x;$$

$$5; \quad 0; \quad \sqrt{x + \operatorname{tg} x}; \quad \arcsin(1 - x).$$

3) Supposte monotone crescenti le funzioni $f, g: E(\subset \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, si studi la monotonia delle seguenti funzioni (eventualmente definite in un sottoinsieme di E):

$$-f; \quad f + g; \quad \frac{1}{f}; \quad f^2; \quad f^3; \quad |f|; \quad f \vee g; \quad f \wedge g; \quad g \circ f.$$

4) Si constati che le seguenti funzioni reali di variabile reale sono monotone sul loro dominio:

$$x^3 + 5x + 1; \quad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 \quad (\text{con } x \geq 0); \quad (1 + \operatorname{arctg} x)^3;$$

$$(2\pi - x) \arccos x; \quad \operatorname{arctg} \frac{1}{x} \quad (\text{con } x > 0).$$

5) Si dimostrino i seguenti *prodotti notevoli*:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b); \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \quad (a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1});$$

$$a^n - b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots - a^2b^{n-3} + ab^{n-2} - b^{n-1}), \text{ se } n \text{ è pari};$$

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1}), \text{ se } n \text{ è dispari}.$$

6) Si ricerchi il polinomio P , di grado ≤ 3 , per cui si ha: $P(-2) = 3, P(-1) = 0, P(0) = 1, P(2) = -5$.

Si ricerchi il polinomio P , di grado ≤ 5 , per cui si ha: $P(-2) = P(-1) = P(0) = 0, P(1) = -4, P(2) = P(3) = -4$.

7) Si scriva un polinomio a coefficienti reali e di grado il più piccolo possibile che ammetta la radice 1 doppia e la radice i tripla.

Si scriva un polinomio a coefficienti reali e di grado il più piccolo possibile che ammetta la radice i semplice, la radice $1 + i$ doppia e la radice 0 tripla.

8) Si determinino i domini delle seguenti funzioni:

$$\sqrt{\frac{x+3}{x^2-2}}; \quad \sqrt{1 - \left| \frac{x}{x+2} \right|}; \quad \arcsin(1-3x); \quad \sqrt{\sin^2 x - \frac{3}{2} \sin x + \frac{1}{2}}; \quad \sqrt{1-2 \sin x};$$

$$\operatorname{arcdin}(\arcsin x); \quad \sqrt{1 + \operatorname{arctg} x}; \quad \sqrt{8 + 2 \log x - \log^2 x}; \quad \log \frac{\pi - 4 \arccos x}{\pi + 3 \arcsin x};$$

$$\sqrt{4 \sin^2 x - 2(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \sin x + \sqrt{6}}; \quad \log(|\sin x + \cos x| - 2|\sin x|);$$

$$\log(1 - |1 - e^{\sin x - \cos x}|); \quad \log\left(\cos x - \cos \frac{x}{2}\right); \quad \log\left(\frac{\pi}{3} - \arccos \frac{x-1}{x+2}\right);$$

$$\frac{e^{2x+1}}{e^{2x-1}}; \quad \log(e^x + e^{-x}); \quad \log[1 - 2 \log(x+1)]; \quad \log[1 - \log(1 - \log x)];$$

$$\sqrt{1 + \log(x^2 + 2x)}; \quad x^x; \quad (x^2)^x; \quad \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x; \quad \log_x(x+1); \quad \log_{\lg x} \sin x.$$

9) Dato un triangolo di vertici A, B, C , indichiamo, come di consueto, con α, β, γ le misure degli angoli corrispondenti e con a, b, c le misure dei lati opposti. Indichiamo poi con $2p$ la misura del perimetro e con A l'area del triangolo. Si provino i seguenti Teoremi che, per altro, dovrebbero essere ben noti.

a) Se il triangolo è rettangolo in A , si ha: $b = a \sin \beta = a \cos \gamma$.

b) *Teorema della corda*. Detto r il raggio della cerchio circoscritto, si ha $a = 2r \sin \alpha, b = \dots$

c) *Teorema dei seni*. Si ha: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} (= 2r)$.

d) *Teorema del coseno*. Si ha: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$.

e) *Formule di Briggs*. Si ha: $\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}; \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$.

f) *Formula di Erone*. Si ha: $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

[Per la (b) basta tener presente che tutti gli angoli alla circonferenza che insistono su una stessa corda sono uguali, essendo tutti uguali alla metà del corrispondente angolo al centro.

Per la (e) basta ricavare $\cos \alpha$ dalla (d) e usare le formule di bisezione tenendo presente che, nel nostro caso, coseno e seno sono sempre positivi.

Per la (f) si parte dall'espressione $A = \frac{1}{2} bc \sin \alpha = bc \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$ e si sfruttano le (e).]

10) Si ricerchino nel campo complesso le radici dei seguenti polinomi:

$$x^2(x^2 + 1); \quad (x^2 + 1)^3; \quad x^4 - 4x^2 + 5; \quad x^6 - x^4 + x^2 - 1; \quad x^4 - 1; \quad x^2 - 2ix - 1.$$

11) Ricorrendo alla forma trigonometrica, si risolvano le seguenti equazioni:

$$z^4 = -1; \quad z^5 = 1 - i; \quad z^3 = iz; \quad z^4 = (1 + i)\bar{z}^2; \quad iz^3 = \bar{z}; \quad z^4 + \bar{z}^4 = iz^2.$$

[Risolviamo, per esempio il problema generale di trovare le radici n -ime di un numero complesso dato; vogliamo cioè risolvere l'equazione $z^n = u$, con u numero complesso dato e z incognito. Posto $z = [\rho, \vartheta]$ e $u = [r, t]$, si ottiene l'equazione $[\rho^n, n\vartheta] = [r, t]$ e quindi il sistema

$$\begin{cases} \rho^n = r \\ n\vartheta = t + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}.$$

In conclusione, si ha $\rho = \sqrt[n]{r}$ e $\vartheta = \frac{t}{n} + \frac{2k\pi}{n}$; i valori di k che danno soluzioni distinte sono, per esempio, $0, 1, 2, \dots, n-1$. Si vede che, rappresentando queste soluzioni nel piano di Gauss, si ottengono i vertici di un poligono regolare di n lati con centro nell'origine.]